Potenzen

Eine Potenz ist eine Kurzschreibweise für ein Produkt, in dem ein Faktor mehrmals vorkommt.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

Wir sagen „a hoch n“, „n-te Potenz von a“, „a zur n-ten Potenz“.

Eine Potenz besteht aus zwei Teilen: Basis und Exponent. Die Basis wird auch Grundzahl genannt.
Die kleine Zahl oben wird Exponent oder Hochzahl genannt. Dabei ist die Basis eine beliebige reelle Zahl, der Exponent ist in der Regel eine natürliche Zahl (1,2,3,4,...).

$$\underset{\text{Basis oder Grundzahl}}{3}^{\overset{\text{Exponent oder Hochzahl}}{4}}$$

Basis ← 3 ⁴ → Exponent
oder Grundzahl oder Hochzahl

Der Term 3^4 wird als Potenz bezeichnet. Wir sagen: „Drei hoch vier.“ Der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor vorkommt. Die hochgestellte "4" gibt also an, dass die Zahl 3 viermal mit sich selbst multipliziert werden soll. Das Ergebnis 81 ist der Potenzwert.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Beispiel:

Anstatt des Produkts $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ (5 gleiche Faktoren!) schreibt und liest man kürzer 4^5 (4 hoch 5).

$$\mathbf{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024}$$

Zahlen als Potenzen schreiben

Nehmen wir die Zahl 3125 als ein Beispiel an. Diese Zahl ist mehrfach durch 5 teilbar.

$$\begin{aligned} 3125 &= 5 \cdot 625 \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 125 \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 25 \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 5^5 \end{aligned}$$

Quadratzahl

Bei Potenzen mit Exponent "**2**" (also alle Zahlen "hoch 2") kann man "Quadratzahl" sagen.

$$5^2$$

„fünf hoch zwei“ oder „fünf zum Quadrat“

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Zehnerpotenzen

Zehnerpotenzen sind Potenzen mit der 10 als Basis. Deren Exponent gibt die Anzahl der Nullen an: 10^n ist eine 1 mit n Nullen.

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ (4 Nullen)

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$ (5 Nullen)

Potenzen

Negative Basis

Ist die Basis negativ, so unterscheidet man zwei Fälle:

Ist der **Exponent gerade,** ist der Potenzwert **positiv.**

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = \mathbf{81}$$

Ist der **Exponent ungerade**, ist der Potenzwert **negativ.**

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \mathbf{-32}$$

Negativer Exponent

Ist der Exponent negativ, schreibt man eins durch die Potenz mit positivem Exponenten. Man bildet also den Kehrwert der Potenz (das Vorzeichen des Exponenten kehrt sich dabei um).

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ mit } a \neq 0$$

Beispiel:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Der Zähler ist immer 1 und im Nenner steht die Potenz mit Basis a und positivem Exponenten n.

Sonderfälle

Merke: 0^0 = nicht definiert

Wenn der **Exponent 0** ist - in diesem Fall gilt für alle reellen Zahlen a:

$$a^0 = 1, \text{ mit } a \neq 0$$

Jede Zahl ungleich 0 hoch Null ergibt 1!

Wenn der **Exponent 1** ist - in diesem Fall gilt allgemein für allen reellen Zahlen a:

$$a^1 = a$$

Eine Zahl hoch 1 ergibt die Zahl selbst.

Wenn die **Basis 1** ist - in diesem Fall ist der Potenzwert immer 1.

$$1^n = 1$$

Eins hoch jede natürliche Zahl ergibt 1!

Wenn die **Basis 0** ist - in diesem Fall ist der Potenzwert 0.

$$0^n = 0, \text{ mit } n > 0$$

Null hoch jede Zahl ungleich 0 ergibt 0!

Merke: **Klammern sind bei Potenzen manchmal sehr wichtig.**

$$-a^n \neq (-a)^n$$

Beispiel:

$$-3^2 = -(3^2) = -(3 \cdot 3) = -9$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$ab^n \neq (ab)^n$$

$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$$

$$\frac{a^n}{b} \neq \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Potenzen mit negativer Basis

Negative Basis

Ist die Basis negativ, so unterscheidet man zwei Fälle:

Ist der **Exponent gerade,** ist der Potenzwert **positiv.**

$\mathbf{(-4)^2} = (-4) \cdot (-4) = \mathbf{+16}$

Minus mal Minus ist Plus

Ist der **Exponent ungerade**, ist der Potenzwert **negativ.**

$\mathbf{(-3)^3} = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = \mathbf{-27}$

Minus mal Minus ist Plus, mal Minus ist Minus

Potenzen mit einer Klammer um die Basis

Taucht in einer Aufgabe um die Basis einer Potenz eine Klammer auf, so bezieht sich der Exponent **auf den gesamten Inhalt der Klammer**.

$$\mathbf{(-a)^4 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)}$$

Beispiel:

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

umgekehrtes Beispiel:

Anstatt des Produkts $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$ schreibt man also: $(-3)^3 = -27$

$$\mathbf{-(a)^4 = -\,(a) \cdot (a) \cdot (a) \cdot (a)} \qquad \mathbf{-a^4 = -\,a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

Beispiel:

$$-(2)^4 = -(2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot (2) = -16$$

umgekehrtes Beispiel:

Anstatt des Produkts $-1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ schreibt man also: $-1 \cdot (3)^3 = -(3)^3 = -3^3 = -27$

KlaPoPS-Regel: Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich: Erst prüfen, ob man in der Klammer verrechnen kann, danach ob die Klammer potenziert wird, danach ob sie mit etwas multipliziert wird und dann führt man eventuelle Strichrechnungen aus.

Klammer vor Potenz

$$\mathbf{(-a^4) = -a^4 = -\,a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

Beispiel:

$$(-2^4) = -2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$$

Potenz vor Strich

$$\mathbf{-(a^4) = -\,(a \cdot a \cdot a \cdot a)}$$

Beispiel:

$$-(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$$